Übungsklausur 1 zur Eignungsprüfung Mathematik Q1

Hinweis:
Das Q1-Semester beginnt im August nach den Sommerferien.

Bearbeitungshinweise

Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:	Nicht-programmierbarer Taschenrechner,
	Schülereigenes Wörterbuch (Deutsch/Muttersprache),
	Schüler- oder schuleigene gedruckte Formelsammlung eines Schulbuchverlages
Verbotene Hilfsmittel:	Alle nicht erlaubten Hilfsmittel, z. B. Handy
Gestelltes Material:	Aufgabenset und kariertes Papier,
	Schuleigene Formelsammlung

Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Berechnungen gut lesbar auf das gestellte karierte Papier.
Sie können auch für Ansätze oder Teillösungen Bewertungseinheiten erhalten.

Nach Ablauf der Bearbeitungszeit muss das Aufgabenset und sämtliches Papier abgegeben werden.

Für das Bestehen der Eignungsprüfung müssen Sie mindestens 22,5 Bewertungseinheiten (45% von 50 möglichen Bewertungseinheiten) erreichen.

Viel Erfolg!

Aufgabenstellung

1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion. Der Rechenweg ist zu dokumentieren.

   a) Funktion g mit der Gleichung $g(x)=\frac{1}{2}x^3-6x^2+18x$

   (3 BE)

   b) Funktion h mit der Gleichung $h(x)=-\frac{1}{4}x^4+17x^2-64$

   (4 BE)

   c) Funktion f mit der Gleichung $f(x)=(18x+27)\cdot e^{-\frac{1}{3}x+2}$

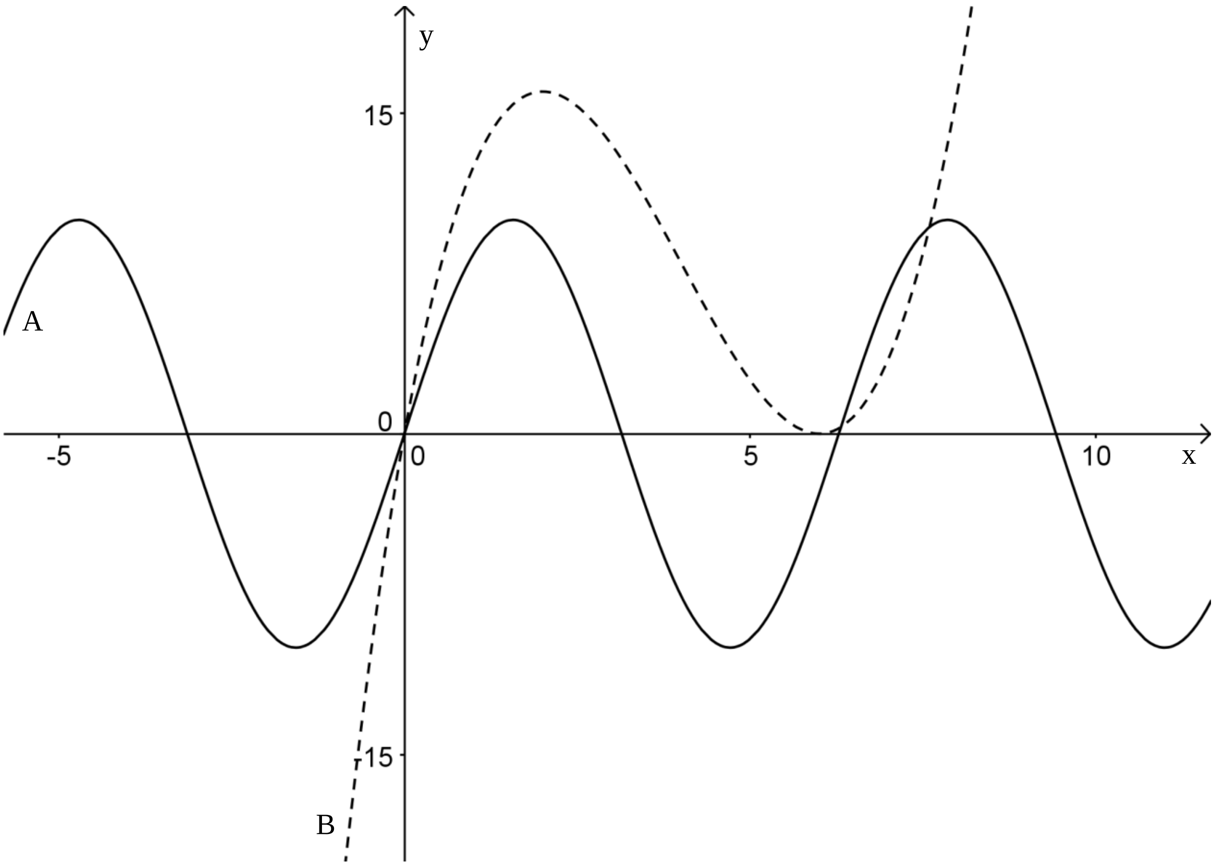
   (2 BE)

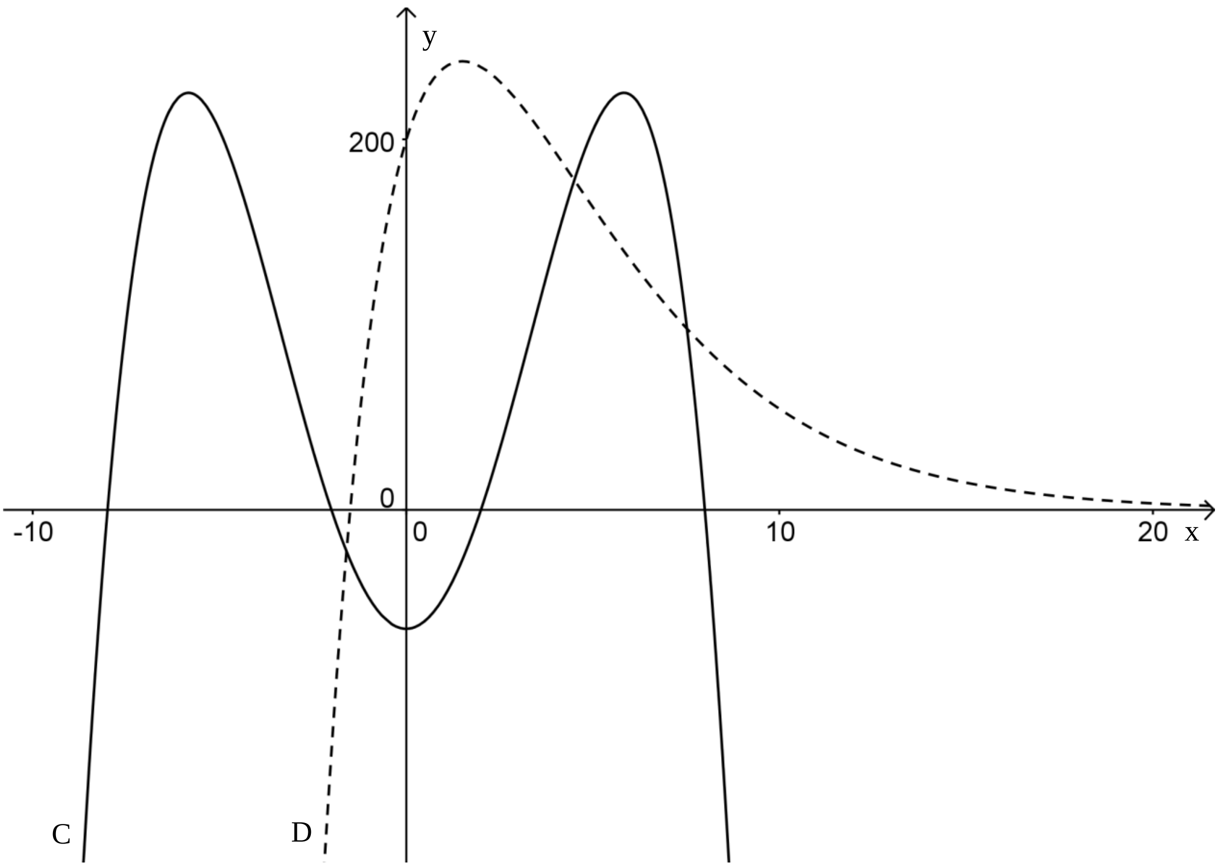
   d) Funktion r mit der Gleichung $r(x)=10\cdot\sin x$
   Hinweis: x ist das Bogenmaß des Winkels.

   (2 BE)

2) Die unten abgebildeten Graphen A, B, C und D gehören jeweils zu einer Funktion aus Aufgabe 1.
Geben Sie für jeden Graphen die zugehörige Funktion aus Aufgabe 1 an.

(4 BE)





3) Die Funktion g besitzt die Gleichung $g(x)=\frac{1}{2}x^3-6x^2+18x.$

a) Geben Sie die ersten drei Ableitungsfunktionen der Funktion g an.

(3 BE)

b) Berechnen Sie den Wendpunkt W des Graphen der Funktion g.

(3 BE)

c) Berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente (Tangente im Wendepunkt) t.

(3 BE)

4) Die Funktion f besitzt die Gleichung $f(x)=(18x+27)\cdot e^{-\frac{1}{3}x+2}$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungsfunktionen der Funktion f.

[zur Kontrolle: $f'(x)=(-6x+9)\cdot e^{-\frac{1}{3}x+2}$]

(4 BE)

b) Berechnen Sie Lage und Art des Extrempunktes des Graphen der Funktion f.

(3 BE)

5) Eine Bakterienkultur vermehrt sich in fünf Stunden um 35 %. Zu Beobachtungsbeginn besitzt die Kultur die Masse 200 g.
Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion k in der Form $k(t)=a\cdot e^{bt}$, die die Masse der Bakterienkultur (in g) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit dem Beobachtungsbeginn) beschreibt, wenn von exponentiellem Wachstum ausgegangen wird.

(4 BE)

6) In einem Experiment nimmt die Masse einer radioaktiven Substanz exponentiell ab. Die Funktion d mit $d(t)=8\cdot 0{,}95^t$ gibt näherungsweise die noch vorhandene Masse der radioaktiven Substanz (in mg) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten seit dem Beobachtungsbeginn) an.

a) Berechnen Sie die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz.

(3 BE)

b) Transformieren Sie die Gleichung der Funktion d auf die Basis e.

(1 BE)

7) Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades besitzt den Extrempunkt $E(-4|8)$ und den Wendepunkt $W(0|0)$.

a) Geben Sie die allgemeine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades an. Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungsfunktionen.

(3 BE)

b) Formulieren Sie Gleichungen für diejenigen Bedingungen, die von der allgemeinen Funktionsgleichung und ihren ersten beiden Ableitungsfunktionen erfüllt werden müssen.

(4 BE)

c) Berechnen Sie die Gleichung der Funktion 3. Grades.

(4 BE)

Lösungshinweise, erhaltbare und erhaltene Bewertungseinheiten

Lösungswege, die von den nachfolgend exemplarisch dargestellten abweichen, aber dem Operator entsprechend als gleichwertig betrachtet werden können, werden selbstverständlich ebenso akzeptiert.

Aufg.	**erwartete Leistungen**	**BE**	
		erhaltbar	**erhalten**
1a	$g(x)=0 \Rightarrow x\cdot(x^2-12x+36)=0$ $\Rightarrow x_1=0;\ x_{2,3}=6\pm\sqrt{6^2-36}=6$	3	
1b	$h(x)=0$ biquadratische Gleichung $\Rightarrow z^2-68z+256=0$ $\Rightarrow z_{1,2}=34\pm\sqrt{34^2-256}\Rightarrow z_1=4;\ z_2=64$ $\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{z_1}=\pm2;\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{z_2}=\pm8$	2 2	
1c	$f(x)=0\Rightarrow 18x+27=0\Rightarrow x=-1{,}5$	2	
1d	$r(x)=0\Rightarrow \sin x=0\Rightarrow x=k\cdot\pi$ mit ganzzahligem k	2	
2	Graph A gehört zu Funktion r. Graph B gehört zu Funktion g. Graph C gehört zu Funktion h. Graph D gehört zu Funktion f.	1 1 1 1	
3a	$g'(x)=\frac{3}{2}x^2-12x+18$ $g''(x)=3x-12$ $g'''(x)=3$	1 1 1	
3b	$g''(x)=0\ \Rightarrow\ x=4$ $g(4)=8;\quad g'''(4)=3\neq0;\quad W(4\|8)$	1 2	
3c	Steigung m der Wendetangente: $m=g'(4)=-6$ y-Achsenabschnitt n der Wendetangente: $y=-6x+n\quad \vert W(4\vert 8)$ einsetzen $8=-6\cdot4+n\ \Rightarrow\ n=32$ $t(x)=-6x+32$	1 1 1	
4a	$f'(x)=(-6x+9)\cdot e^{-\frac{1}{3}x+2}$ $f''(x)=(2x-9)\cdot e^{-\frac{1}{3}x+2}$	2 2	
4b	$f'(x)=0\Rightarrow -6x+9=0\Rightarrow x=1{,}5$ $\left.\begin{array}{l} f'(1{,}5)=0 \\ f''(1{,}5)\approx-26{,}89<0 \end{array}\right\}\Rightarrow$ Maximum bei $x=1{,}5$ $f(1{,}5)\approx242{,}01;\ H(1{,}5\vert 242{,}01)$	1 2	

Aufg.	erwartete Leistungen	BE erhaltbar	BE erhalten
5	$k(0)=a=200$	1	
	$k(5)=\frac{200}{100}\cdot 135=270$	1	
	$200\cdot e^{b\cdot 5}=270 \Rightarrow b=\frac{1}{5}\cdot\ln(\frac{270}{200})=\frac{1}{5}\cdot\ln(1{,}35)\approx 0{,}06$	1	
	$k(t)=200\cdot e^{\frac{\ln(1{,}35)}{5}\cdot t}\approx 200\cdot e^{0{,}06\cdot t}$	1	
6a	T = Halbwertszeit		
	$d(T)=4$	1	
	$8\cdot 0{,}95^{T}=4 \Rightarrow T=\frac{1}{\ln(0{,}95)}\cdot\ln(\frac{4}{8})=\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}95)}\approx 13{,}51$	1	
	Die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz beträgt ca. 13,5 Minuten.	1	
6b	$d(t)=8\cdot e^{\ln(0{,}95)\cdot t}$	1	
7a	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	1	
	$f'(x)=3ax^2+2bx+c$	1	
	$f''(x)=6ax+2b$	1	
7b	$E(-4\mid 8)\Rightarrow\begin{cases}f(-4)=8\\f'(-4)=0\end{cases}$	1 1	
	$W(0\mid 0)\Rightarrow\begin{cases}f(0)=0\\f''(0)=0\end{cases}$	1 1	
7c	Auswerten der Bedingungen mit x = 0:		
	$f(0)=0\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=0\Rightarrow d=0$	0,5	
	$f''(0)=0\Rightarrow 6a\cdot 0+2b=0\Rightarrow b=0$	0,5	
	Auswerten der Bedingungen mit x ≠ 0:		
	$f(-4)=8\Rightarrow a\cdot(-4)^3+0\cdot(-4)^2+c\cdot(-4)+0=8\Rightarrow -16a-c=2$		
	$f'(-4)=0\Rightarrow 3a\cdot(-4)^2+2\cdot 0\cdot(-4)+c=0\Rightarrow 48a+c=0$		
	Lösen des LGS und Angeben der Funktionsgleichung:		
	$\begin{vmatrix}-16a-c=2\\48a+c=0\end{vmatrix}\Rightarrow a=\frac{1}{16};\ c=-3$	2	
	$f(x)=\frac{1}{16}x^3-3x$	1	
	Summe	**50**	